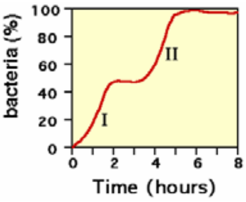
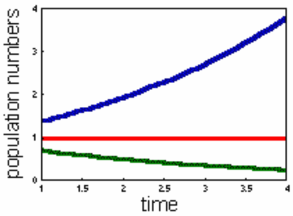
پیش نیازهای ریاضی

منحنی رشد

منحنی رشد به منحنی تغییر اندازه جمعیت، قد و یا بیومس و ... گفته میشود که از پلات کردن آنها در برابر زمان بدست می‌آید. منحنی رشد باکتریها (تصویر روبرو)، منحنی رشد تومور، منحنی افزایش قد کودکان از نمونه‌های متفاوت منحنی رشد هستند. در روبرو منحنی رشد باکتری در محیط کشتی که دارای دو قند گلوکز و لاکتوز است، دیده میشود. در مرحله اول باکتری‌ها رشد میکنند و زمانیکه گلوکز تمام شد، رشد آنها کاهش یافته و مجددا با لاکتوز آشنا شده و رشد دو مرحله‌ای را نشان میدهند. در برخی سیستمهای بیولوژیک، منحنیهای "رشد نمایی" را شاهد هستیم.



دوره رشد نمایی محدود به دوره زمانی است که منبع کنترل‌کننده نرخ رشد، کاهش می‌یابد. مدل نمایی منتسب به مالتوس است که برای اولی ن بار گفت هر گونه به طور بالقوه میتواند به صورت یک سری هندسی تعداد خود را افزایش دهد. برای مثال اگر یک گونه جمعیت همپوشان نداشته باشد، هر ارگانیسم تولید R فرزند میکند و تعداد افراد در هر نسل برابرجمعیت اولیه ضرب در این ضریب خواهد بود ($N_t = N_0 * R^t$). وقتی t خیلی بزرگ باشد این معادله به صورت یک تابع نمایی براورد میشود:



$$N_t = N_0 *\exp(r.t) = N_0 * e^{rt}$$

سه حالت وجود دارد:

- وقتی R کوچکتر از صفر است جمعیت کاهش می‌یابد
- وقتی بزرگتر از صفر است جمعیت افزایش می‌یابد
- وقتی برابر صفر است جمعیت تغییر نمیکند.

پارامتر R را پامتر مالتوسی، نرخ درونزای افزایش، نرخ خودبخودی افزایش طبیعی و نرخ رشد جمعیت میگویند. دو عبارت اخیر عمومی هستند زیرا ارتباطی با تراکم جمعیت ندارند بهتر است عبارت نرخ درونزای افزایش برای پارامتر R در مدل لاجیستیک (به جای مدل نمایی) بکار برده شود زیرا در مدل لاجیستیک پارامتر R برابر نرخ رشد جمعیت در تراکم اولیه کم جمعیت است و هیچگونه مقاومت محیطی وجود ندارد. فرضهای مدل نمایی عبارتند از:

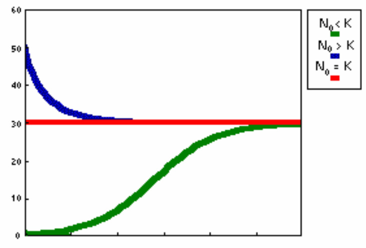
۱- تولید مثل مداوم (نه فصلی)،

۲- تمامی ارگانیسمها شبیه هم باشند (و ساختار سنی نداشته باشند)

۳- محیط در زمان و مکان یکسان باشد (منابع غیر محدود) باشد. اگر این شرایط حاکم باشد مدل نمایی نتیجه خوبی دارد ولی موجودات زنده از نظر سن، قدرت بقا و تلفات یکسان نیستند و از طرفی جمعیت شامل تعداد زیادی ارگانیسم است که تولید و مرگ آنها به طور متوسط، جمعیت را شکل میدهد. میتوان پارامتر R در مدل نمایی را به عنوان تفاوت نرخ تولد و نرخ مرگ قلمداد کرد. نرخ تولد، تعداد نتاج تولید شده توسط یک ارگانیسم در واحد زمان و نرخ مرگ، احتمال مرگ هر ارگانیسم است. بنابراین نرخ رشد جمعیت R برابر تفاضل نرخ تولد منهای نرخ مرگ است.

مدل منطقی (logistic model)

مدل جمعیتی مالتوس رشد جمعیت را بدون توجه به حد رشد و یا انقراض احتمالی آن میبیند. تفاوت صرفا در نرخ رشد R است که مثبت باشد یا منفی. هیچیک از این حالات در جوامع بیولوژیکی دیده نمیشود. آنچه مهم است، اینکه اغلب جمعیتهای کوچک، افزایش و جمعیتهای بزرگ، کاهش می‌یابند. در هر دو حالت، بعد از اینکه تغییرات تعداد جمعیت دیگر مشاهده نشود، یک حالت پایدار بوجود می‌آید مگر اینکه یک تغییر معنی‌دار محیطی بوجود آید. از نظر بیولوژیکی، نقص مدل مالتوس در نادیده گرفتن مسئله "ظرفیت محیطی" است. به موازات رشد جمعیت، عوامل محیطی رو به کاهش میگذارد و مقدار غذا به ازای هر فرد کاهش می‌یابد و آلودگی محیطی در نتیجه فراورده‌های ضایعاتی افزایش یافته و نرخ تولد، کاهش و مرگ و میر، افزایش می‌یابد. باید ظرفیت محیطی را در نظر گرفت. مدل لاجیستیک رشد جمعیت این وظیفه را بعهده دارد. مدل لاجیستیک هم مانند مدل مالتوس دارای پارامتر نرخ رشد (R) است. پارامتر دوم K است که نشان دهنده ظرفیت محیطی سیستم مورد مطالعه است. ظرفیت محیطی به سطحی از جمعیت اطلاق میگردد که در آن نرخ تولد و نرخ مرگ و میر یک گونه، دقیقا با هم برابر باشد و در نتیجه جمعیت در طول زمان به حالت پایدار برسد.



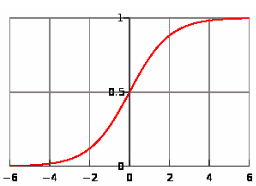
سه حالتی که اتفاق میافتد در تصویر نشان داده شده است. در یک حالت جمعیت افزایش یافته و به فلات میرسد. این مدل از نوع لاجیستیک است. در حالت دوم جمعیت کاهش یافته و به فلات میرسد و در حالت سوم جمعیت تغییری نمیکند.

$$f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

مدل منطقی، که به نامهای دیگری از قبیل رگرسیون لاجیستیک، مدل لاجیت و امثال آن نیز نامیده میشود، مدلی است برای پیش‌بینی احتمال وقوع یک حادثه که بر اساس منحنی لاجیستیک فیت شده است. مدل منطقی در واقع یک مدل خطی تعمیم یافته برای "رگرسیون دو جمله‌ای" است و میتواند متغیر برآوردکننده آن، عددی و دسته‌ای داشته باشد. برای مثال احتمال اینکه یک فرد در بازه زمانی مشخص مورد حمله قلبی قرار گیرد با توجه به دانسته‌های ما در مورد سن، جنس و شاخص وزن بدن پیش‌بینی میشود. این مدل در طب، علوم اجتماعی و بازاریابی بکار میرود. مدل لاجیستیک از روی تابع لاجیستیک بالا بدست می‌آید و گراف آن در شکل ارائه شده است . ورودی آن z و خروجی آن f(z) است و میتواند اعداد منفی بخود بگیرد، در حالی که خروجی آن بین صفر و یک است متغیر Z به صورت زیر تعریف میشود:

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k,$$

که در آن عرض از مبدا و ضرایب رگرسیون متعددی داریم. در بحث حمله قلبی، ضرایب مثبت به معنی افزایش فاکتور ریسک و ضرایب منفی باعث کاهش آن میشوند. ضریب بزرگ اثر بیشتر و ضریب کوچک اثر کمتر دارد.



مثال: اگر x1 سن (دهه) ، x2 جنسیت و x3 سطح کلسترول (نانومول در لیتر) باشد در این صورت مدل به صورت زیر است:

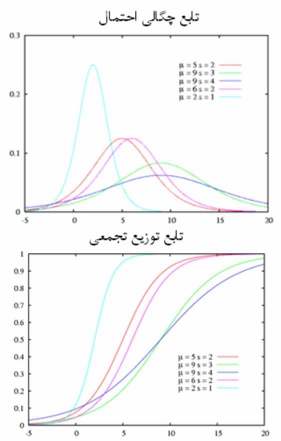
$$\text{risk of death} = \frac{1}{1+e^{-z}}, \text{ where } z = -5.0 + 2.0x_1 - 1.0x_2 + 1.2x_3.$$

در این مدل افزایش سن باعث افزایش ریسک حمله قلبی میشود و به ازای هر ۱۰ سال سن که بالا میرود (البته بالای ۵۰ سالگی)، مقدار z به اندازه ۲ واحد افزایش می‌یابد. جنس زن، موجب کاهش حمله قلبی میشود و افزایش کلسترول نیز باعث افزایش ریسک حمله قلبی میگردد. برای مثال

$$\frac{1}{1+e^{-z}}, \text{ where } z = -5.0 + (+2.0)(5.0 - 5.0) + (-1.0)0 + (+1.2)(7.0 - 5.0).$$

مردی ۵۰ سال سن دارد و کلسترول خون او برابر ۷ نانومول در لیتر است. خطر مرگ به دلیل حمله قلبی در او چقدر است؟

خطر حمله قلبی او برابر ۰/۰۷ یا ۷ درصد است.



مدلهای S شکل یا زیگموئیدی رشد جمعیت نیز همین گونه است. که به جای z در آن عامل زمان t قرار میگیرد. یعنی از روی زمان میتوان به مقدار جمعیت پی برد. اگر زمان بین بینهایت منفی و بینهایت مثبت تغییر کند، در این صورت منحنی به صورت S خواهد بود. در عمل به دلیل طبیعت نمایی e^{-t} کافی است t در محدوده بسته‌تر [-6, +6] درنظر گرفته شود (منحنی بالا). یادگیری در انسان که در ابتدا کم است و به تدریج افزایش مییابد و پس از مدتی به کلیماکس میرسد شکل زیگموئیدی دارد و دارای مدل لاجیستیک است.

توزیع لاجیستیک در تئوری احتمالات و آمار ، یک توزیع احتمال مداوم است و توزیع تجمعی آن از نظر شکل شبیه توزیع نرمال میباشد با این تفاوت که دنبالههای توزیع آن سنگین تر است

توزیع لاجیستیک و الگوی S شکل آن در حوزه‌های مختلفی کاربرد دارد. در بیولوژی برای توصیف اینکه چگونه جمعیت گونه‌های مختلف در رقابت رشد می‌کنند. در اپیدمیولوژی برای توصیف اینکه اپیدمی چگونه گسترش می‌یابد. در روانشناسی برای توصیف یادگیری بکار میرود. در تکنولوژی برای توصیف این بکار میرود که چگونه تکنولوژی جدید نفوذ کرده و جایگزین تکنولوژیهای قدیمی میشود. در بازاریابی نشر و گسترش فروش کالای جدید از این رابطه تبعیت میکند.

منحنی یا تابع تعمیم یافته لاجیستیک را به نام "منحنی ریچارد" میخوانند و شکل روبرو را دارد و در آن y وزن، ارتفاع و امثال آن و t عامل زمان است. در این منحنی ۵ پارامتر وجود دارد:

$$Y(t) = A + \frac{K - A}{(1 + Qe^{-B+3(t-M)})^{1/\nu}}$$

A- مماس پایینی یا کمینه

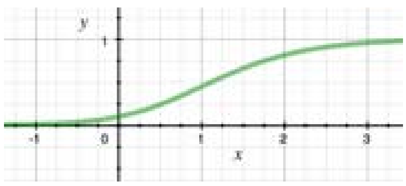
K- مماس بالایی یا بیشینه منهای A. اگر A برابر صفر باشددر این صورت K را ظرفیت محیطی میگویند

B- نرخ رشد. V>0 که مبین آن است که مماس ازلی حداکثر رشد دیده میشود

Q- تابع مقدار y(0)

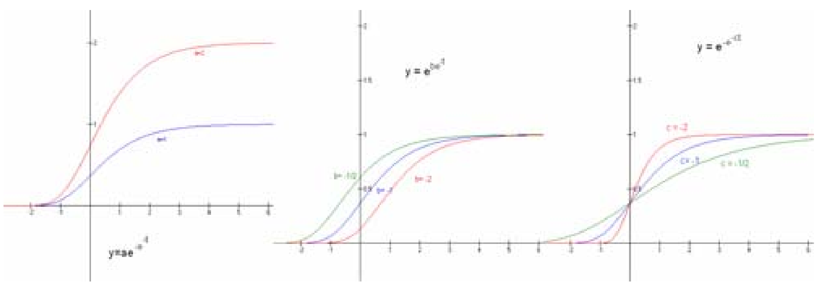
M- زمان رسیدن به حداکثر رشد یعنی زمانی که Q=v باشد.

برای گراف روبرو A=0، B=1.5، Q=V=0.5 و M=0.5



تابع گومپرتز

این تابع نیز حالت زیگموئیدی دارد و مدل ریاضی برای سری‌های زمانی است به طوری که در ابتدا و در انتها، رشد ناچیز است و معادله آن به صورت $y(t) = ae^{be^{ct}}$ است که در آن a مماس بالایی، c نرخ رشد، b و c اعداد منفی هستند و e همان عدد اولر (۲/۷۱۸۲۸۰۰۰) است.

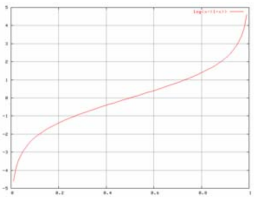


منحنی خرید موبایل از این مدل تبعیت میکند زیرا در ابتدا که موبایل گران است کسی آنرا نمیخرد و بعد از آن رشد سریعی نشان میدهد و در انتها به دلیل اشباع شدن، بازار خرید آن کاهش می‌یابد. نمونه دیگر، رشد جمعیت در یک فضای بسته (از قبیل رشد باکتری در پتری دیش و رشد تومور) است.

منحنی تابعی که از قانون گومپرتز بدست آمده نشان میدهد که سرعت مرگ و میر با توجه به اندازه فعلـی جمعیـت، به طور نمایی کاهش می‌یابد. بعدها با تغییر در مدل گومپرتز، برای توجیه مسیر رشد تومورها قانون دیگـری بـه نـام قانون **Gomp-ex** بدست آمد که در آن فرض میشود که در ابتدا از نظر منابع، هیچ رقابتی وجـود نـدارد و در نتیجـه سلولها به طور نمایی رشد میکنند. این قانون ترکیبی از رشد نمایی و گومپرتز است. قانون گومپرتز-مکهـام در مـورد مرگ و میر، بیان میکند که نرخ مرگ در نتیجه عامل مستقل از سن (عبـارت مکهـام) و عامـل وابـسته بـه سـن (تـابع گومپرتز) بوجود می‌آید و به طور نمایی با افزایش سن افزایش مـی‌یابـد. در یـک محـیط محافظت شـده کـه عوامـل بیرونی مرگ کاهش می‌یابد (مثلا آزمایشگاه و یا کشورهایی که مرگ و میر کم است)، تلفـات مـستقل از سـن اغلـب نادیده گرفته میشود و قانون مزبور به قانون اولیه گومپرتز تبدیل میگردد که نتیجه آن رشد نمایی تلفات با توجه بـه سن است.

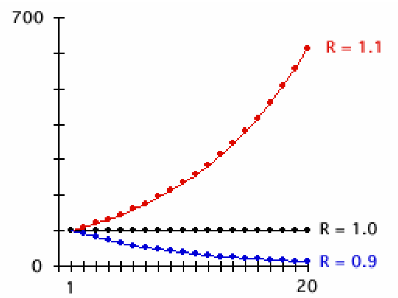
مدل لاجیت (logit)

مدل لاجیت بخشی از رگرسیون لاجیستیک و در واقـع معکـوس تـابع لاجیـستیک یـا زیگموئیـدی اسـت و بیـشتر در مطالعات و ارزیابیهای روانشناسی و آموزشی کاربرد دارد.



مدل‌های جمعیتی

جمعیت پدیده مهمی است. جمعیت انسانی در شهر، کشور و سیاره زمین، جمعیت گونه‌های گیاهی و جانوری که ما با آنها در این سیاره زندگی میکنیم. جمعیت گونه‌های مختلف با انواع متفاوتی از مدلها توصیف میگردند. بـرای مثـال حـشرات در منـاطق حـاره‌ای جهـان دارای نسلهای منقطع هستند و زندگی هر نـسل در بهـار شـروع و در پـاییز خاتمه می‌یابد یعنی زمـانی کـه باقیمانـده حـشره در انتهـای پـاییز، آخـرین تخمهای خود را میگذارندند و خود میمیرنـد و تخمهـا در بهـار سـال آینـده دوباره جمعیت حشره را شکل میدهد. در این موارد که نسلها منقطع هستند میتوان نسل‌های جداگانه‌ای را نام بـرد (p_1، p_2 ... p_n) کـه در آن p_n بیـانگر نسل nام است. فرض کنیم جمعیت اولیه حشره‌ای برابر ۱۰۰۰۰ است و هر سال با نرخ رشد ۱ درصد رشد میکند:



P(1) = 10000

P(n) = p(n-1) + 0.01 p(n-1) = 1.01 p(n-1)

هر مدلی که در آن جمعیت با نرخ ثابتی در سال رشد کند و یـا کـاهش یابـد اصـطلاحا مـدل نمـایی (Exponential) نامیده میشود و معادله آن به صورت زیر است:

P(n) = R p(n-1)

که در آن R مقدار ثابت و برابر نطخ رشد سالانه جمعیت و در مثال بالا برابـر ۱/۰۱ اسـت. اگـر جمعیـت نـسل قبـل ۱۰۰۰۰ و نرخ رشد ۱ درصد باشد، تعداد حشرات نسلی فعلی برابر ۱۰۱۰۰ است:

P(n) = 1.01 * 10000 = 10100

در جمعیتهای رو به رشد، مقدار R بیشتر از یک و در جمعیتهای رو بکاهش کمتر از یک است. در صورتی که مقدار R برابر یک باشد جمعیت ثابت میماند. اگر R کمتر از ۱ باشد جمعیت رو به مرگ و نابودی است و اگر بیشتر از ۱ باشد جمعیت بدون حد و مرز افزایش می‌یابد. ولی میدانیم که در دنیای واقعی این مسئله مقدور نیست زیرا در مکان زیست جمعیت، مقدار خوراک، آب و منابع محدودی وجود دارد. فرض کنیم که محیط، ظرفیت نگهداری ۵۰۰۰۰ حشره را داشته باشد. اگر نرخ رشد جمعیت حشره برابر ۵ درصد در سال باشد، پس از ۳۴ سال تعداد حشرات به ۵۰۰۰۰ میرسد و بعد از آن دیگر افزایش جمعیت با اشکال مواجه میشود.

نسل	تعداد	نسل	تعداد
۱	۱۰۰۰	۶	۱۲۷۶/۲۸
۲	۱۰۵۰	۷	۱۳۴۰/۱۰
۳	۱۱۰۲/۵	۸	۱۴۰۷/۱۰
۴	۱۱۵۷/۶۲	۹	۱۴۷۷/۴۶
۵	۱۲۱۵/۵۱	۱۰	۱۵۵۱/۳۳

$$P(n+1) = 1.05 * p(n) \qquad n = 34$$

هرچه نرخ رشد بیشتر باشد سالهای رسیدن به این محدودیت کاهش می‌یابد. هر مدلی که تعداد نسلها در آن منقطع بوده و بتوان تعداد جمعیت هر نسل را با عدد مشخصی بیان نمود آنرا سیستم دینامیکی منقطع (Discrete dynamical system) میگویند.

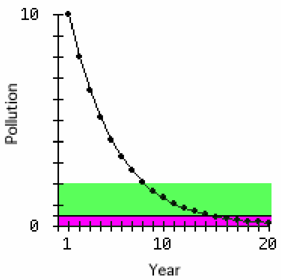
آلودگی

مقدار آلودگی یک دریاچه برابر ۱۰ قسمت در میلیون و جریان طبیعی آب به دریاچه و از آن برقرار است و در نتیجه مقدار آلودگی هر سال برابر ۱۰ درصد کاهش می‌یابد و تا زمان رسیدن آلودگی به سطح ۵ قسمت در میلیون، ممنوعیت شنا برقرار است. چند سال طول میکشد تا بتوان در آن شنا کرد؟ طبق جدول روبرو، به مدت ۷ سال

سال	سم	سال	سم
۱۹۹۰	۱۰	۱۹۹۵	۵/۹۰
۱۹۹۱	۹	۱۹۹۶	۵/۳۱
۱۹۹۲	۸/۱۰	۱۹۹۷	۴/۷۸
۱۹۹۳	۷/۲۹	۱۹۹۸	۴/۳۰
۱۹۹۴	۶/۵۶	۱۹۹۹	۳/۸۷

برآورد و حد (Estimation and limits)

همان دریاچه بالا را در نظر می‌گیریم. دانشمندان حفاظت محیط زیست گفتند سطح آلودگی دریاچه هر سال به میزان ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. مدل کاهش آلودگی دریاچه به صورت $P(1) = 10$ $p(n+1) = 0.80\, p(n)$ بوده و جدول و نمودار تغییرات آلودگی در زیر ارائه شده است. ریاضی‌دانها این مسئله را به صورت "حد" مطرح میکنند: $\text{Lim}\ p(n) = 0$ به این معنی که معادله‌ای مینویسند که مقدار آلودگی به سمت صفر میل کند. دولت برای شنا کردن در این دریاچه محدوده ۲ قسمت در میلیون را تایید کرده است. با توجه به گراف زیر متوجه میشویم که تا رسیدن به نوار سبز، دریاچه برای شنا مطلوب نیست



یعنی ۸ سال طول میکشد. از نظر ریاضی $|p(n)|<T$ به طوری که اگر حد تحمل T برابر ۲ قسمت در میلیون باشد، n برابر ۹ سال است و در ۸ سال اولیه نمیتوان در آن شنا کرد. حال اگر بخواهیم آب دریاچه را برای شرب استفاده کنیم، لازم است آلودگی آن به سطح ۰/۵ قسمت در میلیون برسد. برای این منظور باید ۱۵ سال صبر کنیم تا آلودگی به نوار قرمز برسد.

مسئله حد، از نظر توصیفی به ما میگوید که پس از چند سال، آلودگی به صفر نزدیک میشود. همچنین به طور دقیق میتواند بگوید که اگر حد تحمل T را داشته باشیم در این صورت N سال طول میکشد که $|p(n)|<T$ به این معنی که برای همه $n \geq N, |p(n)| \leq T$.

سال	سم	سال	سم	سال	سم	سال	سم
۱	۱۰	۶	۳/۲۸	۱۱	۱/۰۷	۱۶	۰/۳۵
۲	۸	۷	۲/۶۲	۱۲	۰/۸۶	۱۷	۰/۲۸
۳	۶/۴۰	۸	۲/۱۰	۱۳	۰/۶۹	۱۸	۰/۲۳
۴	۵/۱۲	۹	۱//۶۸	۱۴	۰/۵۵	۱۹	۰/۱۸
۵	۴/۱۰	۱۰	۱/۳۴	۱۵	۰/۴۴	۲۰	۰/۱۴

اگر سطح آلودگی کنونی برابر ۱۵ قسمت در میلیون باشد و هر سال ۳۰ درصد کاهش یابد، چند سال طول میکشد تا سطح تحمل آن برابر ۲ قسمت در میلیون شود؟ با توجه به جدول روبرو و محاسبات زیرین، مساوی یا بیشتر از ۷ سال.

سال	آلودگی	سال	آلودگی	سال	آلودگی	سال	آلودگی
۱	۱۵	۶	۲/۵۲	۱۱	۰/۴۲	۱۶	۰/۰۷
۲	۱۰/۵۰	۷	۱/۷۶	۱۲	۰/۳۰	۱۷	۰/۰۵
۳	۷/۳۵	۸	۱/۲۴	۱۳	۰/۲۱	۱۸	۰/۰۳
۴	۵/۱۴	۹	۰/۸۶	۱۴	۰/۱۵	۱۹	۰/۰۲
۵	۳/۶۰	۱۰	۰/۶۱	۱۵	۰/۱۰	۲۰	۰/۰۲

آلودگی سال دوم:

$$P(n+1) = 0.7\, p(n) = 0.7 * 15 = 10.50$$

آلودگی سال سوم:

$$0.7 * 10.50 = 7.35$$

این مراحل را انجام میدهیم و توجه میکنیم که در چه سالی حد تحمل به ۲ میرسد. جدول سال ۷ را نشان میدهد که برای اولین بار مقدار آلودگی کمتر از ۲ قسمت در میلیون شده است. بنابراین جواب ۷ است. حال اگر سطح تحمل مورد نیاز برابر ۰/۵ و ۰/۱قسمت در میلیون باشد تعداد سالهای مورد نیاز به ترتیب مساوی یا بیش از ۱۱ و ۱۶ سال خواهد بود که جواب را مستقیما از همین جدول گرفته‌ایم و دنبال سالهایی هستیم که مقدار آلودگی به این سطوح رسیده است. حال اگر مقدار آلودگی هر سال به اندازه ۱۰ درصد کاهش یابد برای محاسبه تعداد سالهای مورد نیاز برای رسیدن به سطح تحمل ۲، ۰/۵ و ۰/۱ قسمت در میلیون لازم است جدول مربوطه رسم شود که به ترتیب مساوی یا بیش از ۲۱، ۳۴ و ۵۰ سال خواهد شد. روش کار شبیه بالا است با این تفاوت که به جای ۰/۷، مقدار ۰/۹ را قرار میدهیم و فرمول را متوالیا حل کرده و جدول را تشکیل میدهیم و به همان شیوه فوق، دنبال سالهایی میگردیم که شرط ما برقرار است.

فرض میکنیم آلودگی طبیعی دریاچه برابر ۰/۱ قسمت در میلیون باشد. محاسبه مقدار آلودگی دریاچه در سالهای آینده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$P(1) = 10$ ppm
$P(n+1) = 0.1 + 0.80\, [p(n) - 0.1]$

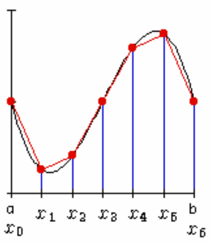
و تنظیم آلودگی نه تنها تابع مقدار آلودگی دریاچه بلکه تابع تفاوت بین سطح آلودگی و سطح طبیعی آن (۰/۱) نیز هست. به عبارت بهتر اگر سطح تحمل T باشد، لازم است دنبال سالهایی بگردیم که شرط اساسی $|p(n) - 0.1| \leq T$ برقرار باشد. برای مثال چند سال طول میکشد که حد تحمل به ۰/۱ قسمت در میلیون برسد: پس از رسم جدول، تعداد سالها مساوی یا بیش از ۳۲ سال خواهد بود و فرمول محاسبه آن برای سال دوم عبارت است از:

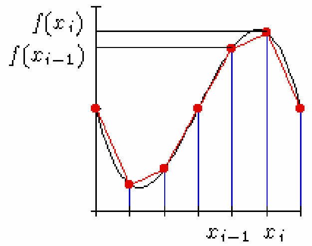
$P(1) = 15$

$P(n+1) = 0.1 + 0.8\,[p(n) – 0.1] = 0.1 + 0.8\,[10 - 0.1] = 8.02$

سال	آلودگی	سال	آلودگی	سال	آلودگی	سال	آلودگی
۱	۱۰	۶	۳/۳۴۴	۲۵	۰/۱۴۶۸	۳۰	۰/۱۱۵۳
۲	۸/۰۲	۷	۲/۶۹۵	۲۶	۰/۱۳۷۴	۳۱	۰/۱۱۲۳
۳	۶/۴۳۶	۸	۲/۱۷۶	۲۷	۰/۱۲۹۹	۳۲	۰/۱۰۹۸
۴	۵/۱۶۹	۹	۱/۷۶۱	۲۸	۰/۱۲۳۹	...	...
۵	۴/۱۵۵	۱۰	۱/۴۲۹	۲۹	۰/۱۱۹۱	۴۵	۰/۱۰۰۳

البته از نظر ریاضی نمیتوانیم میلیونها سال صبر کنیم تا سطح آلودگی به صفر برسد و ما بتوانیم به سلامت در آب دریاچه شنا کنیم یا از آن استفاده شرب نماییم. در آن زمان اصلا خود ما وجود نخواهیم داشت که بتوانیم سواحل دریاچه را باز نگه داریم. این منجر به برداشت ریاضی و ارائه راه حل ریاضی شد که در بالا به آن اشاره گردید تا بتوان نیاز مردم را برآورده نمود که عملا چه زمانی میتوانند از آب دریاچه استفاده کرده و در آن شنا کنند. دیدیم که در این موارد نمیتوان جواب صریحی بدست آورد و لازم است برآوردی از جواب را داشته باشیم.





براوردی که برای هدف عملی ما به اندازه کافی مناسب و خوب باشد. مسئله حد و برآورد دو طرف یک سکه هستند. فرض کنیم میخواهیم طول منحنی تابع $y = f(x)$ را در محدوده بین $[a, b]$ از روی منحنی زیر بدست آوریم. میتوانیم منحنی دیگری با استفاده از خطوط راست تشکیل داده و مسئله را براورد کنیم. برای این برآورد فقط شش خط راست در نظر گرفتیم ولی میتوان n خط در نظر گرفته و منحنی را به n قطعه تقسیم کرد. هر چه تعداد قطعات بیشتر باشد برآورد ما دقیق‌تر است. ابتدا فاصله $[a, b]$ را به n قطعه با طول مساوی تقسیم میکنیم $h = (b - a)/n$ و نقطه $x(i)$ را به صورت $x(i) = a + i\,h$ تعریف مینمایم. اُمین قطعه از $x(i – 1)$ تا $x(i)$ و اُمین خط راست از $(x(i - 1), f(x(i – 1))$ تا $(x(i), f(x(i)))$ ادامه دارد. طول آن برابر است با $\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (f(x_i – f(x_{i-1}))^2}$ که در تصویر دوم دیده میشود. با جمع کردن تمامی فواصل n تایی میتوان طول منحنی را به صورت زیر محاسبه کرد:

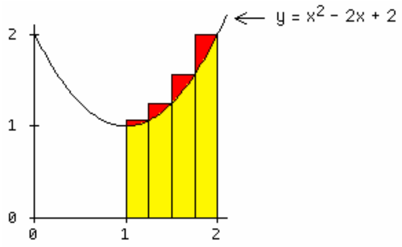
$$\sum^n \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (f(x_i – f(x_{i-1}))^2}$$

برآورد و حد- سطح زیر منحنی

میخواهیم سطح زیر منحنی را بدست آوریم. دو راه یا ماژول وجود دارد: ماژول کشف (discovery module) که سطح زیر منحنی را کشف میکنیم و ماژول مرجع (reference module) که سطح زیر منحنی را توصیف میکنیم.

ماژول کشف

منطقه زرد رنگ در نمودار روبرو دارای چهار وجه است. از طرف چپ محدود به $x=1$، از طرف راست محدود به $x=2$، از طرف پایین $y=0$ و از بالا محدود به $y=x^2 - 2x + 2$ است. میخواهیم سطح آنرا محاسبه کنیم. میتوان بر اساس تقسیم آن به سطوح فرعی، آن را برآورد کرد. منطقه زرد به چهار نوار تقسیم شده و هر کدام دارای عرض ۰/۲۵ است [$x(i) = 1+ 0.25i$]. iمین نوار از $x(i-1)$ تا $x(i)$ است. برای مثال نوار دوم از ۱/۲۵ تا ۱/۵۰ است. میخواهیم سطح این نوار را محاسبه کنیم در حالی که میدانیم شبیه یک مستطیل است. ارتفاع این نوار برابر:



$(1.50)^2 – 2(1.50) + 2 = 1.25$

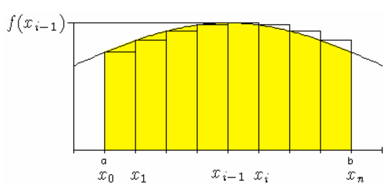
و سطح آن برابر عرض ضرب در ارتفاع است یعنی:

Area= (1.25) * (.25) = 0.33125

همین کار را برای تمامی چهار نوار انجام میدهیم و آنها را با هم جمع میکنیم تا سطح زیر منحنی بدست آید. برآورد ما به اندازه مناطق قرمز زیاد است. به دو چیز باید توجه کرد. اول اینکه عرض این ۴ منطقه قرمز به اندازه نوارها است و دوم اینکه مناطق قرمز شبیه پلکان هستند و میتوان آنها را روی همدیگر قرار داد زیرا قسمت ته هر قطعه درست به اندازه قسمت بالای قطعه سمت چپ آن است.

ماژول مرجع

میخواهیم سطح زرد رنگ تصویر روبرو را محاسبه کنیم که دارای چهار طرف است: محور X، خط عمودی $X=a$، خط عمودی $X=b$ و خط قوس دار منحنی $Y=f(cx)$. منطقه بین a و b را به n نوار تقسیم میکنیم:



$h = (b-a)/n$

آنگاه بر روی محور X، نقاط زیر را معین میکنیم:

X0=a ،X1=a+h ... ،xi=a+ih ... ،xn=b

حال سطح هر مستطیل را بدست می آوریم. i مین مستطیل از $x(i-1)$ تا $x(i)$ تغییر میکند و مستطیلی داریم که ارتفاع آن $f(x(i-1))$ و عرض آن h است. سپس مساحت تمام نوارها را با هم مجمع میکنیم:

$\sum^n f(xi-1)h$

باید توجه کرد که مساحت هر نوار به گونه‌ای بدست آمده است که ارتفاع آن شبیه سمت راستی نوار $f(x(i))$ است.

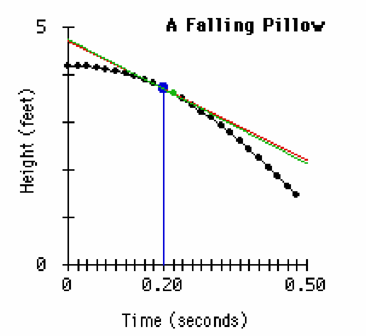
در تمامی موارد، وقتی تعداد نوارها زیاد شود، برآورد ما براورد مناسبی خواهد بود.

مثال: بهترین برآورد سطح زیر منحنی محصور شده برای معادله $f(x)= x^2 + 1$ و محدوده $a=0$ و $b=4$ را بدست آورید: ۲۵/۳۳۳

برآورد و حد- تانژانت

زمان	ارتفاع	زمان	ارتفاع
۰	۴/۱۸۸	۰/۲۶	۳/۳۶۷÷
۰/۰۲	۴/۱۸۰	۰/۲۸	۳/۲۳۰
۰/۰۴	۴/۱۷۷	۰/۳۰	۳/۰۸۹
۰/۰۶	۴/۱۵۲	۰/۳۲	۲/۹۴۵
۰/۰۸	۴/۱۱۲	۰/۳۴	۲/۷۷۳
۰/۱۰	۴/۰۷۶	۰/۳۶	۲/۶۰۷
۰/۱۲	۴/۰۲۹	۰/۳۸	۲/۴۳۱
۰/۱۴	۳/۹۶۸	۰/۴۰	۲/۲۴۷
۰/۱۶	۳/۸۹۶	۰/۴۲	۲/۰۵۲
۰/۱۸	۳/۸۱۳	۰/۴۴	۱/۸۵۴
۰/۲۰	۳/۷۱۶	۰/۴۶	۱/۶۴۹
۰/۲۲	۳/۶۱۱	۰/۴۸	۱/۴۴۷
۰/۲۴	۳/۴۹۶		

اعداد جدول و گراف روبرو، زمان و ارتفاع گلوله در حال سقوط را نشان میدهد. سرعت گلوله را در زمان t=0.20 بدست آورید. شیب تانژانت را در این زمان (خط قرمز) بدست آورید.



روش برآورد سرعت گلوله در زمان مشخص، آن است که تغییرات ارتفاع گلوله در زمان ۰/۲۰ تا ۰/۲۲ ثانیه را بدست آوریم و سپس آن را بر فاصله زمانی که این تغییر اتفاق افتاده، کنیم.

(3.611 – 3.716) / 0.02 = -5.221

توجه باید کرد که جواب منفی است زیرا گلوله در حال سقوط و ارتفاع آن در حال کاهش است.

برای بدست آوردن شیب خط در نقطه مورد نظر باید خط عبور کننده از دو نقطه (0.20, 3.716) و (0.22, 3.361) را بدست آوریم که به رنگ سبز است. این خط بسیار نزدیک به تانژانت منحنی در نقطه ۰/۲۰ (خط قرمز) است. محاسبات شبیه محاسبه سرعت گلوله است. بطور کلی شیب تانژانت منحنی y=f(t) در نقطه t=a و یا سرعت در زمان T=a شبیه است و میتوان آنرا به شیوه زیر محاسبه کرد:

F(a+h) – f(a) /h

که h مقدار بسیار کوچکی است و لذا براورد آن برابر صورت کسر فوق میباشد. بنابراین سرعت در یک زمان مشخص و تانژانت منحنی در همان نقطه یکسان است. اگر معادله منحنی برابر $f(t)=t^2$ باشد در این صورت در زمان t=2 سرعت برابر ۴ خواهد بود.

Year	Account 1	Account 2
1	200.00	100.00
2	206.00	105.00
3	212.18	110.25
4	218.55	115.76
5	225.10	121.55
34	530.47	500.32
35	546.38	525.33
36	562.77	551.60
37	579.66	579.18
38	597.05	608.14
39	614.96	638.55
40	633.41	670.48

در مباحث بالا با موارد متعددی از براوردها مواجه شدیم. راهی که ورود آب تازه باعث از بین بردن آلودگی در دریاچه میشود، راهی که منطقه زیر یک منحنی را بتوان محاسبه کرد، راهی که بتوان شیب تانژانت منحنی در یک نقطه از آن را محاسبه کرد و بالاخره راهی که بتوان سرعت گلوله را در زمان مشخص تعیین نمود. در تمامی موارد میتوانیم بگوییم که حد منحنی در نقطه خاص در صورتی که عامل آن به سمت صفر میل کند چه مقدار است:

Lim p(n) = L　　　　Lim p(x) = L
n --> 00　　　　　　x --> 00

اگر مینویسیم Lim p(n) = 0 وقتی n --> 00 در واقع میگوییم که سطح آلودگی پس از چند سال به صفر میرسد. یا وقتی میخواهیم سطح زیر منحنی را بدست آوریم در واقع دنبال مکانیسمی برای برآورد سطح زیر منحنی هستیم

سکانس‌ها

موارد بسیاری وجود دارد که میتوان آنها را با سکانس اعداد نشان داد. برای مثال اگر ۱۰۰ دلار در بانک بگذاریم و سالانه سود ۴ درصد بگیریم. مقدار اولیه پول در بانک برابر $p(1)=100$ و در آغاز سال دوم برابر $p(2)=104$ است یعنی:

$$p(2)= p(1) + 0.04 * P(1) = 1.04 * p(1)$$

در آغاز سال سوم مقدار کل پول ما در بانک برابر است با:

$$p(3)= p(2) + 0.04 * P(2) = 1.04 * p(2) = 108.16$$

و فرمول عمومی زیر رادارایم:

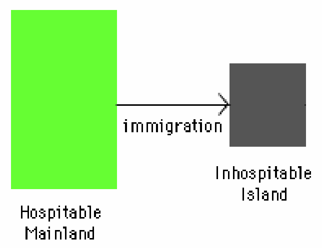
$$P(n) = 104 * p(n-1)$$

یک بانک ۲۰۰ دلار سرمایه اولیه با سود ۳ درصد گرفته و دیگری ۱۰۰ دلار با سود ۵ درصد گرفته است. چه زمان طول میکشد که مقدار سپرده در هر دو بانک برابر شود: جدول نشان میدهد که ۳۸ سال

سکانسها مثال خوبی برای توصیف مقدار پول در هر زمان مشخص، گذشته و آینده قیمت یک محصول و یا گذشته و آینده جمعیت یک گونه خاص در یک مکان زیست مشخص است.

مدل نمایی جمعیت همراه با مهاجرت (سیستم‌های دینامیک خطی)

قبلا فرمول نمایی جمعیت به صورت $p(n)= R*p(n-1)$ معرفی شد. اگر چنانچه R کوچکتر از یک شود جمعیت به تدریج کاهش می‌یابد ولی از نظر ریاضی هیچ وقت به صفر نمیرسد. برای مثال اگر جمعیت اولیه برابر ۱۰۰ و R برابر ۰/۵ باشد، در نسل دهم تعداد افراد به ۰/۱۹۵۳۱۲۵ و در نسل چهلم به ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۸۲ نفر میرسد. بنابراین از نظر ریاضی هیچوقت $p(n)$ به صفر نمیرسد. ولی در دنیای واقعي اینطور نیست زیرا تعداد کمتراز یک نفر نمیتوان داشت و در عمل جمعیت به سرعت به صفر میرسد و مضمحل میشود. به همین دلیل مدل نمایی با R کمتر از یک، چندان مفید نیست. چه زمان این مدل مفید است؟



فرض کنید یک جزیره دور افتاده وجود دارد. رابطه نمایی با R کمتر از یک، موجب از بین رفتن سریع جمعیت در آن میشود. حال اگر جزیره مزبور در مجاورت یک شهر مسکون باشد، مقداری مهاجرت به آن انجام میشود. مدل تغییر جمعیت جزیره فوق در این صورت به شکل زیر است

$$p(n) = R * p(n - 1) + M \qquad p(n) = 0.80 * p(n - 1) + 1000$$

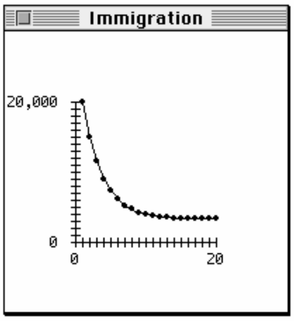
که به آن "مدل نمایی با مهاجرت" گفته میشود. مقدار ثابت M، نرخ مهاجرت سالانه از شهر مسکون به جزیره مزبور است.

این معادله به این معنی است که جمعیت هر سال ۲۰ درصد کاهش می‌یابد ولی هر سال ۱۰۰۰ نفر به آن مهاجرت میکنند. اگر جمعیت اولیه آن ۲۰۰۰ نفر باشد، سال دوم جمعیت آن ۲۶۰۰ و سال سوم ۳۰۸۰ نفر است. در زیر سه حالت برای جمعیت اولیه ۲۰۰۰۰، R برابر ۰/۷۰، جمعیت اولیه ۱۰۰۰، R برابر ۰/۷۰ و بالاخره جمعیت اولیه ۵۰۰۰، R برابر ۰/۸۰ و M برابرهر سه حالت برابر ۱۰۰۰ نشان داده شده است. ملاحظه میشود که در هر حالت جمعیت به سطح طبیعی خود نزدیک و نزدیک‌تر میشود و ثابتهای R و M بر روی این سطح طبیعی اثر گذاشته و سرعت رسیدن به آن را کنترل میکنند.

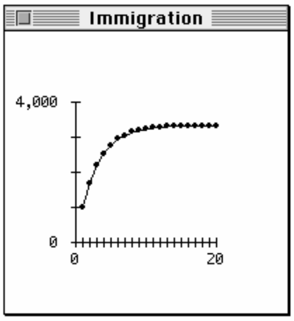
مدل‌های منطقی منقطع (discrete logistic models)

مدلهای نمایی جمعیت چنانچه قبلا توضیح داده شد تابع مقدار R هستند. پیش‌بینـی بـا ایـن مـدلها نتـایج غیـر واقعـی بوجود می‌آورد زیرا فرض بر آن است که نرخ رشد از نسلی به نسل دیگر ثابت است. عوامل زیادی روی نـرخ رشـد

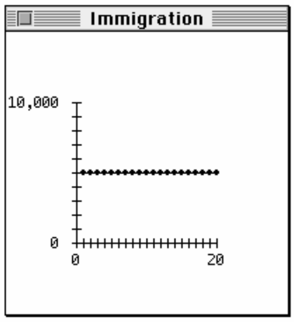
1	20000.00
2	15000.00
3	11500.00
4	9050.00
5	7335.00
6	6134.50
7	5294.15
8	4705.90
9	4294.13
10	4005.89
11	3804.13
12	3662.89
13	3564.02
14	3494.82
15	3446.37
16	3412.46
17	3388.72
18	3372.11
19	3360.47
20	3352.33



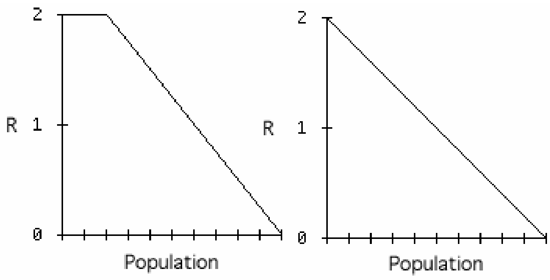
1	1000.00
2	1700.00
3	2190.00
4	2533.00
5	2773.10
6	2941.17
7	3058.82
8	3141.17
9	3198.82
10	3239.17
11	3267.42
12	3287.20
13	3301.04
14	3310.73
15	3317.51
16	3322.26
17	3325.58
18	3327.91
19	3329.53
20	3330.67



1	5000.00
2	5000.00
3	5000.00
4	5000.00
5	5000.00
6	5000.00
7	5000.00
8	5000.00
9	5000.00
10	5000.00
11	5000.00
12	5000.00
13	5000.00
14	5000.00
15	5000.00
16	5000.00
17	5000.00
18	5000.00
19	5000.00
20	5000.00



اثر دارند. از همه مهمتر، اندازه جمعیت است. وقتی جمعیت کوچک اسـت، مقـدار غـذا، آب و مـسکن کـافی اسـت و جمعیت به سرعت رشد میکند در حالی کـه وقتـی جمعیـت بزرگ باشد این مواد به اندازه کافی در دسـترس نیـست و جمعیت به آهستگی رشد میکند و حتی ممکن است کاهش یابد. به همین دلیل، ثابت R در معادلـه $p(n) = R * p(n - 1)$ تغییر کـرده و خـود شـکل تـابع میگیـرد. و مـدل بـه صورت زیر در می‌آید:



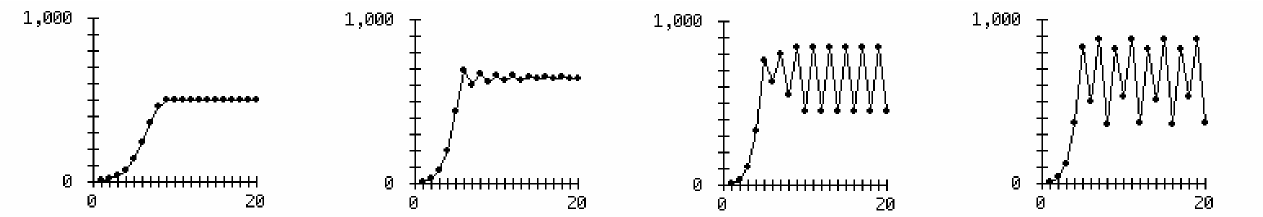
p(n) = R(p(n - 1)) * p(n - 1)

تابع R(p) غالبا به شکل تابع روبرو (سمت چپ) است. وقتی جمعیت کوچک است، R>1 و جمعیت افزایش می‌یابد. وقتی جمعیت بزرگ است، R<1 و جمعیت کاهش می‌یابد. باید توجه داشت که وقتی جمعیـت نـسبتا کوچـک اسـت، R(p) ثابت است. این واقعیت دارد زیرا یک جمعیت بسیار کوچـک در یـک مـسکن بـزرگ بـه سـرعت بیولـوژیکی ممکنه خود به تکثیر نسل خواهد پرداخت تا به اندازه‌ای بزرگ شود که اثر جمعیت، فشار خود را آغـاز کنـد. از نظر ریاضی ساده‌ترین تابع R(p) یک تابع خطی به شکل سمت راست است و دارای فرمول زیر می‌باشد:

R(p) = a(1 - b p)

در این صورت، مدل اولیه به صورت زیر در می‌آید که آنرا "مدل منطقی منقطع" مینامند. این مـدل، بـسیار مناسـب و جالب است و رفتارهای خاصی نشان میدهد که در تصاویر زیر نمونه‌های متعدد آن ارائه شده است:

p(n) = a[1 - b p(n - 1)] p(n – 1)



p(n) = 2 [1 - .001 p(n-1)] p(n - 1)   p(n) = 2.8 [1 - .001 p(n-1)] p(n-1)   p(n) = 3.4 [1 - .001 p(n-1)] p(n-1)   p(n) = 3.54 [1 - .001 p(n-1)] p(n-1)

ارقام محاسبه شده برای مدل سوم (ازچپ) برای ۲۰ نسل به شرح زیر است:

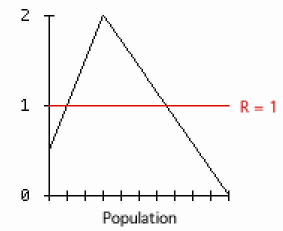
1	10.00	6	625.80	11	843.07	16	450.72
2	33.66	7	796.20	12	449.83	17	841.74
3	110.59	8	551.71	13	841.44	18	452.92
4	334.43	9	840.91	14	453.62	19	842.46
5	756.79	10	454.86	15	842.69	20	451.25

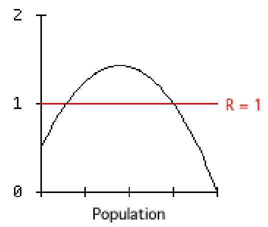
مدل سگ شکاری (Pack-hunter)

در برخی گونه‌های حیوانی از قبیل سگ شکاری، افراد با هم همکاری میکنند. رشد جمعیت در این گونه‌ها غالبا با مدلهایی از قبیل مدل زیر با تغییراتی در آن بیان میشود:

$$p(n) = R(p(n - 1)) * p(n - 1)$$

تابع $R(p)$ در آن به شکل زیر نشان داده میشود:



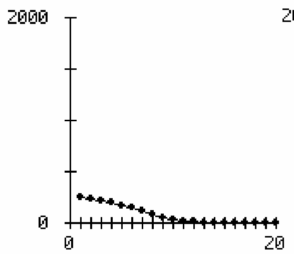


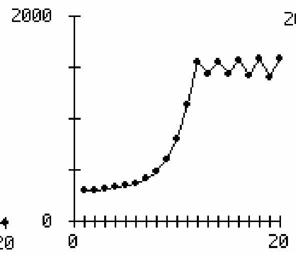
وقتی $R(p(n)) < 1$ باشد جمعیت در نسل بعد کاهش می‌یابد و وقتی $1<$ باشد افزایش می‌یابد. برای گونه‌هایی مثل سگ شکاری که با هم همکاری میکنند، $R(p)$ کمتر از یک است،خواه جمعیت کوچک باشد خواه بزرگ. وقتی جمعیت خیلی کوچک است جمعیت افت میکند زیرا تعداد مناسبی از افراد وجود ندارند تا در شکار همکاری کنند و لذا غذای کافی گیر آنها نمی‌آید. همچنین وقتی جمعیت خیلی بزرگ باشد نیز جمعیت کاهش می‌یابد زیرا غذا، آب و مکان کافی برای شکار در اختیار آنها نیست. در تصویر روبرو (چپ) دیده میشود که وقتی جمعیت کوچک یا بزرگ است، R کمتر از ۱ خواهد بود.

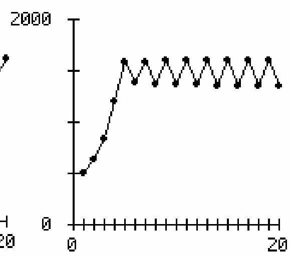
فرض کنیم مدل زیر را داریم. گراف روبرو (راست) تابع $R(p)$ را نشان میدهد.

$$R(p) = 0.5 + 0.0015\, p - 0.000001166667\, p\, (p - 500)$$
$$p(n) = R(p(n - 1)) * p(n - 1)$$

در زیر سه منحنی نشان داده شده است که از این مدل استفاده شده است ولی شرایط اولیه جمعیت متفاوت است. توجه کنید که وقتی جمعیت اولیه کوچک است، جمعیت به سرعت از بین میرود ولی در دو مورد دیگر که جمعیت اولیه زیاد است، این گونه به بقای خود ادامه میدهد.







برای مثال چنانچه $R(p)$ در صورتیکه $P<500$ باشد برابر $(1.5p)/500$ و در صورتیکه $P>=500$ باشد، برابر $(2 - p)/1000$باشد، اگر جمعیت اولیه برابر ۲۰۰ باشد، در نسل ۶ تعداد آنها به صفر میرسد و اگر تعداد اولیه آنها ۴۰۰ باشد پس از ۶ نسل تعداد آنها به ۱۰۰۰ رسیده و ثابت میشود و اگر تعداد اولیه ۶۰۰ باشد، جمعیت پس از ۴ نسل به ۱۰۰۰ نفر رسیده و ثابت میشود و اگر ۸۰۰ نفر اولیه باشد تعداد آنها بعد از ۳ نسل به مقدار ثابت ۱۰۰۰ نفر میرسد.

و چنانچه $R(p)$ در صورتیکه $P<500$ باشد، برابر $(2p)/500$ و در صورتیکه $P>=500$ باشد برابر $(2.5 - p)/1000$باشد، اگر جمعیت اولیه برابر ۲۰۰ باشد بعد از ۶ نسل به صفر میرسد و اگر جمعیت اولیه ۴۰۰ باشد بعد از ۱۸ نسل به مقدار ثابت ۱۵۰۰ میرسد. اگر تعداد اولیه ۶۰۰ نفر باشد بعد از ۱۷ نسل به تعداد ثابت ۱۵۰۰ میرسند و اگر تعداد اولیه ۸۰۰ نفر باشند نیز در نسل ۱۷ به تعداد ثابت ۱۵۰۰ میرسند. محاسبات آخرین مورد به صورت جدول زیر است.

1	800.00	6	1493.28	11	1500.21	16	1499.99
2	1360.00	7	1503.32	12	1499.90	17	1500.00
3	1550.40	8	1498.33	13	1500.05	18	1500.00
4	1472.26	9	1500.83	14	1499.97	19	1500.00
5	1513.10	10	1499.58	15	1500.01	20	1500.00

سیستم‌های دینامیکی منقطع (Discrete Dynamical Systems) و معادلات تفاوت

حساب، در واقع ریاضیات تغییر است. سکانس‌ها و سیستم‌های دینامیکی منقطع، متضمن نوعی از تغییر هستند که در جمعیت حشرات منطقه حاره و یا قیمت فراورده کشاورزی در نسلهای منقطع دیده میشود و گذشته و آینده را میتوان با استفاده از سکانسهایی نشان داد. در این گونه موارد دو قطعه اطلاعات در دسترس است:

شرایط اولیه که به صورت $p(1)$ یا نظیر آن نوشته میشوند و شرایط نهایی که شبیه $p(1995)$ نوشته میشود و معادله تغییر (change equation) که چگونگی تغییر وضعیت از یک نسل به نسل بعد را نشان میدهد به صورت $\mathbf{p(n) = f(p(n-1))}$ یا $\mathbf{p(n+1) = f(p(n))}$ نوشته میشود. یکی از دلایل اینکه ریاضیات ابزار قدرتمندی است این است که به ما اجازه میدهد تا ایده مشابهی رابه طرق مختلف بیان کنیم که به نوبه خود دارای جنبه‌های مختلف است به این معنی که چیزهایی که ابتدا مهم و جدی به نظر میرسند ممکن است اگر از جنبه دیگری به آن توجه شود، به طور ناگهانی از بین بروند و ارزش خود را از دست بدهند. در این مبحث سه روش مختلف برای بیان تغییر را نشان میدهیم:

n	p(n)	معادله تغییر	معادله نسبت
1	12000		
2	13097	1097.	1.09
3	14115	1018.	1.08
4	15199	1084.	1.08
5	16202	1003.	1.07
6	17242	1040.	1.06
7	18292	1050.	1.06
8	19364	1072.	1.06
9	20431	1067.	1.06
10	21498	1067.	1.05
11	22500	1001.	1.05
12	23573	1073.	1.05
13	24614	1041.	1.04
14	25633	1019.	1.04
15	26671	1037.	1.04
16	27743	1073.	1.04
17	28805	1062.	1.04
18	29849	1044.	1.04
19	30878	1029.	1.03
20	31880	1002.	1.03

معادله تغییر به شکل $\mathbf{p(n+1) = f(p(n))}$ که بر راهی متمرکز میشود که هر نسل توسط نسل پیشینی خود شکل میگیرد. معادله تفاوت (difference equation) به شکل $\mathbf{p(n+1) - p(n) = g(p(n))}$ که بر روی تفاوت بین هر نسل و نسل پیشین او متمرکز است. معادله نسبت (ratio equation) که بر روی نسبت بین هر نسل و نسل پیشین متمرکز است.

فرض کنیم در کشوری جمعیت در سال ۱۹۹۵ برابر ۱۲۳۴۵۶۷۸ نفر بوده است و هر سال ۰/۲ درصد افزایش یافته است. میتوان وضعیت اولیه را به صورت $p(1995) = 12{,}345{,}678$ نوشت و تغییر آنرا به صورت $p(n+1) = 1.002\ p(n)$ ، تفاوت آن را به صورت $p(n+1) - p(n) = 0.002\ p(n)$ و نسبت آنها را به صورت $p(n+1)/p(n) = 0.002$ بیان کرد. توجه شود که برای این مورد خاص، معادله نسبت از همه روشن‌تر است زیرا قسمت راست معادله ثابت است و به سرعت میتوان فهمید که یک مدل نمایی در اختیار ما است. حال اگر در کشوری منبع اولیه جمعیت آن ناشی از مهاجرت باشد (با نرخ ۳۰۰۰۰ در سال) در این صورت تغییر جمعیت را میتوان به یکی از اشکال زیر نشان داد. معادله تغییر $\mathbf{p(n+1) = p(n) + 30{,}000}$ معادله تفاوت $p(n+1) - p(n) = 30{,}000$ و معادله نسبت $\mathbf{p(n+1)/p(n) = 1 + 30{,}000/p(n)}$. توجه میشود که در این مورد معادله تفاوت، روشن‌ترین است و میتوان بلافاصله دانست که تغییر از سالی به سال دیگر تقریبا ثابت است. روشهای مختلف مدل که در بالا اشاره شد، مستلزم استفاده از طرق مختلف آنالیز است. برای مثال اگر داده‌های در اختیار شما را به بهترین وجهی بتوان با مدل نمایی نشان داد، مناسب است که نسبت $p(n+1)/p(n)$ دیده شود که آیا مقدار آن ثابت است یا خیر. از طرفی اگر انتظار دارید که تغییرات از نسلی به نسل بعدی تقریبا ثابت باشد در این صورت با ارزش است که به تفاوت جمعیت در دو سال متوالی یعنی $p(n+1) - p(n)$ توجه شود.

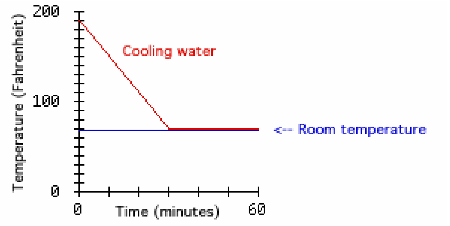
معادله تغییر $p(n+1) = 1.05\ p(n)$ را به صورت معادله تفاوت و معادله نسبت بیان کنید؟

$$\mathbf{p(n+1) - p(n) = 0.05\ p(n)} \text{ و } \mathbf{p(n+1) / p(n) = 1.05}$$

داده‌های دو ستون اول جدول روبرو را تحلیل کنید:

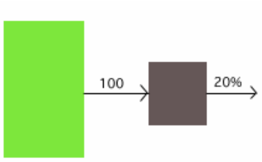
معادله تفاوتها و نسبتها، محاسبه و در دو ستون ۳ و ۴ ارائه شده است. توجه شود تفاوتها، حول و حوش میانگین ۱۰۵۰ تغییر میکنند در حالی که نسبتها رو به کاهش است بنابراین به نظر میرسد که مدل زیر برای آن مناسب

باشد. اگرچه مقداری تغییرات تصادفی در آن دیده میشود که در دادههای واقعی معمول است. $p(n + 1) - p(n) = 1050$



مدل سرمایش نیوتن

مدل سرمایش نیوتن مورد بسیار خوبی است که در حساب و معادلات دیفرانسیل بکار میرود. وقتی یک جسم داغ مثل یک فنجان چای در مکان سرد گذاشته میشود، دمای آن کاهش می‌یابد. برای انسان در روزهای سرد همین اتفاق می‌افتد. به تجربه میدانیم که در روزهای باد، انسان احساس سرمای بیشتری دارد. در واقع در فصل زمستان، علاوه بر درجه حرارت، عامل باد-سرما نیز در گزارشات هواشناسی درج میشود. ببینیم اثر سرما و باد بر روی خنک کردن اجسام چیست؟ دو فنجان چای را تا حد جوش گرم کنیم و یکی از آنها را در معرض پنکه و دیگری در هوای آزاد در همان مکان قرار میدهیم و کاهش دمای هر دو را ثبت میکنیم. خنک شدن آن چیزی شبیه گراف است.



توجه:

۱- دمای اولیه ۱۹۰ درجه فارنهایت است،

۲- فنجان آب در عرض ۳۰ دقیقه خنک شده و به دمای اطاق رسیده است،

۳- رای سرد شدن جسمی از ۱۹۰ به ۱۵۰ درجه همان مدت زمان نیاز است که برای سرد کردن از ۱۵۰ به ۱۱۰ درجه،

۴- دمای آب به طور ثابت کاهش می‌یابد تا به دمای اطاق برسد و پس از آن کاهش دما وجود ندارد. شما انتظار دارید که گراف به چه چیزی شباهت داشته باشد؟ وقتی آب داغ است، زودتر خنک میشود یا زمانی که گرم است؟ آیا سرد شدن آب یکنواخت است؟ آیا دمای آب وقتی به دمای اطاق رسید دیگر کاهش نمی‌یابد؟ چه مدت زمانی طول میکشد که آب سرد شود؟

نقطه تعادل

بحث خود را در مورد مدل نمایی با مهاجرت $p(n + 1) = 0.80\ p(n) + 100$ دنبال میکنیم. این مدل در مورد جمعیتی است که در محیط بسیار نامناسب زندگی میکنند. هر نسل جمعیت به اندازه ۲۰ درصد کاهش می‌یابد ولی به اندازه ۱۰۰ نفر در هر نسل به این جامعه مهاجرت صورت میگیرد. اگر جمعیت کنونی برابر ۵۰۰ نفر باشد در این صورت ۲۰ درصد کاهش جمعیت کمتر از میزان مهاجرت به آن بوده و در نتیجه جمعیت رشد میکند. اگر جمعیت بیش از ۵۰۰ نفر باشد، ۲۰ درصد کاهش جمعیت بیش‌تر از مهاجرت ۱۰۰ نفر در هر نسل بوده و در نتیجه جمعیت کاهش می‌یابد و اگر جمعیت دقیقا ۵۰۰ نفر باشد، کاهش ۲۰ درصدی جمعیت دقیقا برابر مهاجرت ۱۰۰ نفره است و جمعیت ثابت باقی میماند. این یک نقطه تعادل است. نقطه‌ای که جمعیت بدون تغیر میماند. اگر یک سیستم

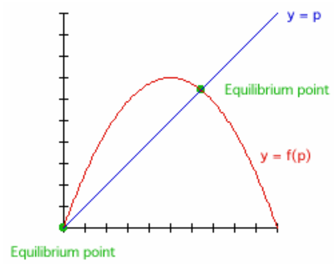
دینامیک منقطع توسط یک معادله تغییر از نوع $p(n + 1) = f(p(n))$ توصیف گردد، در این صورت نقطه تعادل نقطه P خواهد بود به طوریکه $p = f(p)$ و در مثال خودمان خواهیم داشت:

$$\mathbf{p(n + 1) = 0.80\ p(n) + 100} \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{f(p) = 0.80\ p + 100}$$

میتوان هر نقطه تعادلی را با استفاده از این معادله بدست آورد که اگر این معادله برای P حل شود عدد ۵۰۰ بدست می‌آید.

مدل منطقی $p(n + 1) = 2.8[1 - .001\ p(n)]\ p(n)$ را در نظر بگیرید. اینجا نیز میتوان با حل معادله، نقطه تعادل را بدست آورد:

$p = 2.8\ (1 - .001\ p)\ p$
$p = 2.8\ p - .0028\ p\text{^}2$
$0 = 1.8\ p - .0028\ p\text{^}2$
$0 = p(1.8 - .0028\ p)$ $\mathbf{p = 0}$ or
$1.8 - .0028$
$p = 0.0028\ p = 1.8$
$p = 1.8/.0028 = \mathbf{642.86}$

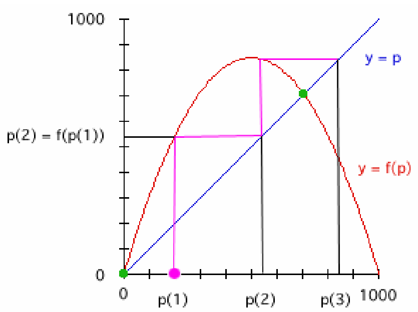


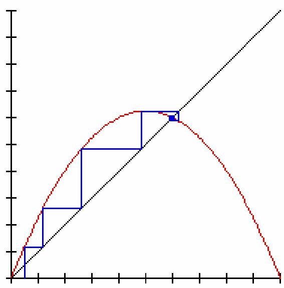
همچنین میتوان از روشهای جبری، عددی و گرافیکی برای بدست آوردن نقطه تعادل استفاده کرد. برای مثال اگر دو معادله $y=f(p)$ و $Y=p$ را در یک محور مختصات رسم کنیم، برای معادله بالا گراف روبرو را خواهیم داشت. نقطه تعادل نقطه‌ای است که دو منحنی باهم برخورد کرده‌اند. معمولا برای یافتن نقطه تعادل از تکنیک گرافیکی و تکنیک عددی استفاده میشود. تکنیک گرافیکی یک برآورد کلی به ما میدهد در حالی که تکنیک عددی (از قبیل روش تقسیم به دو bisection و روش نیوتن) براورد دقیق را در اختیار میگذارد. این روشها با کامپیوتر با سرعت و دقت انجام میشود. نقطه تعادل معادلات زیر ارائه شده است:

$p(n + 1) = 1.05\ p(n)$	$p = 0$
$p(n + 1) = p(n) + 250$	این سیستم دینامیکی نقطه تعادل ندارد
$p(n+1) = 3.2\ (1 - .001\ p(n))\ p(n)$	$p = 0$ or $p = 2.2/.0032$
$p(n + 1) = 0.80\ p(n) + 3000$	$p = 15{,}000$
$p(n + 1) = 3.4\ (1 - .001\ p(n))\ p(n)$	$p = 0$ or $p = 2.4/.0034$
$p(n + 1) = R\ p(n) + M$	$p = M / (1 - R)$

دیاگرام تار عنکبوتی

دیاگرام تار عنکبوتی، یک روش گرافیکی برای دیدن و تحلیل سکانس‌های $(p(1), p(2), \ldots p(n))$ است که توسط سیستم دینامیکی $p(n + 1) = f(p(n))$ ایجاد میشود.





با استفاده از مدل منطقی (لاجستیک) $p(n + 1) = 3.4\ [1 - .001\ p(n)]\ p(n)$ و تصویر مربوط به نقطه تعادل که قبلا ملاحظه شد، اولین مرحله این است که نقطه $P(1)$ رابر روی محود X مشخص کنیم (تصویر سمت چپ). سپس یک خط عمودی از این نقطه به منحنی رسم میکنیم تا در نقطه $(p(1), f(p(1))) = (p(1), p(2))$ بر روی منحنی $y=f(p)$ آنرا قطع کند. مرحله بعد این است که یک خط افقی از نقطه $(p(1), p(2))$ بر روی منحنی $y=f(p)$ به نقطه $(p(2), p(2))$ بر روی خط قطری $y=p$ رسم نماییم. این فرایند دو مرحله ای که ابتدا یک خط عمودی بر منحنی $y=f(p)$ رسم کنیم

و سپس به طور افقی به خط قطری برسانیم وظیفه محاسبه $p(2) = f(p(1))$ را به طور گرافیکی به عهده دارد. همین عملیات را میتوان برای نقاط $p(3)$، $p(4)$ و ... انجام داد.

مثال: دیاگرام تار عنکبوتی را برای مسئله زیر رسم کنید.

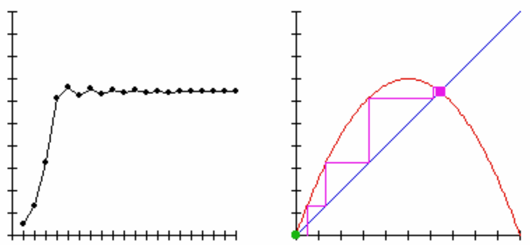
$p(n + 1) = 2.5\ [1\ \ .001\ p(n)]\ p(n)$
$p(1) = 50$

جواب: دیاگرام سمت راست بالا.

رفتار دراز مدت

سیستمهای دینامیکی منقطع- سیستمهای واقعی و مدلهای ریاضی- رفتارهای فوق‌العاده و عجیبی از خود به نمایش میگذارند. در این مبحث آنها را مرور می‌کنیم. ساده‌ترین مدل جمعیتی، مدل نمایی $p(n + 1) = R\ p(n)$ است که نشان میدهد که جمعیت با نرخ رشد ثابتی در نسلهای بعدی افزایش یا کاهش می‌یابد. برای مثال مدل $p(n + 1) = 1.20\ p(n)$ نشان میدهد که جمعیت در هر نسل به اندازه ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. در این مدل بحث ظرفیت محیطی مطرح نشده است. بلحاظ ریاضی می‌گوییم که برای هر عدد B، یک n خواهیم داشت به طوری که $|p(n)| > B$. در این حالت گفته میشود که سکانس، بدون حد و مرز (unbounded) است. اگر چنانچه یک B وجود داشته باشد که برای هر n داشته باشیم $|p(n)| <= B$ در این صورت میگوییم سکانس، محدود (bounded) است و B مرز آن است. عملا جمعیتهای واقعی تماما محدود هستند زیرا کره زمین و منطقه زیست مختلف محدود هستند.

1	50.00	6	623.97	11	648.70	16	640.92
2	133.00	7	656.97	12	638.09	17	644.40
3	322.87	8	631.01	13	646.61	18	641.62
4	612.15	9	651.94	14	639.82	19	643.85
5	664.78	10	635.36	15	645.26	20	642.06



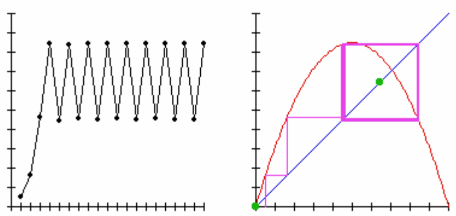
سیستمای دینامیکی منقطع- حد

در مدل منطقی $p(1) = 50$ و $p(n + 1) = 2.8\ [1 - .001\ p(n)]\ p(n)$، که ساده‌ترین مدل منطقی است، اطلاعات جدول، گراف و دیاگرام تار عنکبوتی به صورت روبرو است. به نظر میرسد که جمعیت در نقطه تعادل ۶۴۲/۸۶ به تعادل جمعیتی برسد. در این موارد می‌گوییم جمعیت به یک حد (Limit) نزدیک میشود. به عبارت بهتر جمعیت به نقطه تعادل رانده شده و یا جذب میگردد. وقتی سکانس‌هایی از این قبیل به سمت نقطه‌ای مانند ۶۴۲/۸۶ = ۰/۰۰۲۸ ÷ ۱/۸ نزدیک میشوند، میگوییم که دارای یک حد 1.8/0.0028 است و مینویسم:

$\text{Lim}\quad p(n) = 1.8/.0028 = 642.86\ \ |\ n \text{ --> oo}$

توجه داشته باشید که دو واژه حد (Limit) و باند (bound) دارای مفاهیم متفاوت و ویژه هستند اگرچه غیر ریاضی‌دانان آنرا به یک معنی بکار می‌برند. در اینجا منظور ما همان حد است. برای هر سیستم دینامیکی منقطع و معقول - $(p(1)=$ و $p(n + 1) = f(p(n))$ و با فرض اینکه f یک تابع مداوم باشد، اگر $\lim_{n\to\infty} p_n = L$، در این صورت تئوری زیر را داریم: اگر L حد سکانس $p(1), p(2), \ldots$ باشد، در آن صورت L یک نقطه تعادل است:

1	50.00	6	840.11	11	454.66	16	842.65
2	161.50	7	456.69	12	843.01	17	450.81
3	460.42	8	843.62	13	449.97	18	841.77
4	844.67	9	448.54	14	841.49	19	452.85
5	446.08	10	841.00	15	453.51	20	842.44



$\text{Lim}\quad p(n) = L\ |\ n \text{ --> oo}$

در این صورت:

$$\lim f(p(n)) = f(L) \mid n \to \infty$$

گواه: با فرض یک خطای اپسیلونی، باید یک N را پیدا کنیم، به طوری که برای هر $n \geq N$ داشته باشیم:

$$|f(p(n)) - f(L)| < \epsilon$$

چون f مداوم و متصل است لذا یک دلتا دارد بطوری که اگر $|x - L| < \delta$ در این صورت

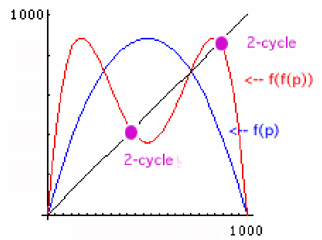
$$|f(x) - f(L)| < \epsilon$$

و چون حد $p(n) = L$ وقتی n به صفر میل میکند، لذا یک N وجود دارد که اگر $n \geq N$ باشد $|p(n) - L| < \delta$ خواهد بود. این دلالت بر آن دارد که $|f(p(n)) - f(L)| < \epsilon$ و این گواه کافی برای اثبات آن است.

رفتار بلند مدت- چرخه‌ها

در مدل منطقی $p(1) = 50$ و $p(n + 1) = 3.4\,[1 - .001\, p(n)]\, p(n)$، رفتار ها متفاوت است و جدول و دیاگرام عنکبوتی آن در زیر ارائه شده است.

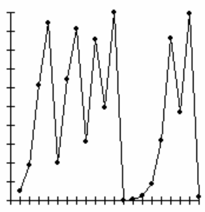
چنانچه ملاحظه میشود در این نمودار، جمعیت بین دو محدوده ۴۵۰ و ۸۴۰ نفر نوسان میکند. یک چنین الگویی را که در آن تعداد مشخصی دائما تکرار میشود اصطلاحا چرخه (cycle) نام دارد. در این مورد چون دو عدد تکرار میشود آنرا چرخه دوگانه (2-cycle or cycle of period 2) میگویند. وقتی الگوی تکرار، سه عدد را شامل شود به آن چرخه سه‌گانه میگویند و ... چرخه شباهتهایی با نقطه تعادل دارد. ما نقاط تعادل را برای یک سیستم دینامیک با معادله تغییر $p(n + 1) = f(p(n))$ و از طریق حل معادله $p = f(p)$ بدست می‌آوریم. از نظر گرافیکی، حل این معادله نقاطی را پیدا میکند که در آن منحنی $y = f(p)$ خط قطری $y=p$ را قطع میکند. حل معادله نشان میدهد که یک الگوی چرخه دوگانه $p = f(f(p))$ داریم. از نظر گرافیکی، حل مسئله نقاطی را نشان میدهد که در آن منحنی $y = f(f(p))$ خط قطری را قطع میکند

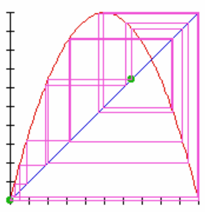


باید توجه داشت که نقاط تعادل نیز راه حلی برای این معادله هستند.

بیاد می‌آوریم که یک نقطه تعادل در یک سیستم دینامیکی ممکن است یک حد برای سکانسهای تولید شده توسط سیستم دینامیکی باشد یا نباشد. همچنین یک چرخه دوگانه یا بیشتر ممکن است یک سکانس را جذب کند یا نکند.

1	50.00	6	645.70	11	999.65	16	316.37
2	190.00	7	915.09	12	1.39	17	865.11
3	615.60	8	310.82	13	5.57	18	466.77
4	946.55	9	856.84	14	22.14	19	995.58
5	202.38	.0	490.67	15	86.59	20	17.59





برای مثال مدل منطقی $p(1) = 50$ و $p(n + 1) = 4.0\,[1 - .001\, p(n)]\, p(n)$ را در نظر بگیرید. رفتار جمعیت در اینجا متفاوت از مثالهای بالا است. جدول، نمودار و دیاگرام عنکبوتی آن در تصویر روبرو نشان داده شده است. ملاحظه میشود که الگوی خاصی در میان نیست. این وضعیت را کیاس (chaos)، تصادفی (randomness) و یا عجیب (weird) میگویند زیرا سکانس اعداد $p(1), p(2), p(3), \ldots$ الگویی از خود نشان نمی‌دهند و به نظر میرسد که بر حسب اتفاق و تصادف و یا فرایندهای بی‌قائده بوجود آمده باشد.

هر مدل منطقی از فرم $p(n + 1) = 4\,[1 - b\, p(n)]\, p(n)$ از خود کیاس نشان میدهد مگر اینکه $p(1)$ یک نقطه تعادل و یا یک چرخه باشد. مدلهای منطقی از فرم $p(n + 1) = a\,[1 - b\, p(n)]\, p(n)$ که در آن a نزدیک به ۴ باشد نیز کیاس هستند. جالب و تا حدودی مشکل است که تعیین کنیم که چگونه اگر a نزدیک به ۴ باشد، الگو دچار کیاس میشود.

دسته‌بندی نقاط تعادل

تا کنون مثالهای متعددی در باره نقطه تعادل برای سیتمهای دینامیکی دیدیم. برخی از این نقاط تعادل‌ها جوهرا جاذب هستند و سکانسها را به هم نزدیک میکنند و برخی برعکس جاذب نیستند. دسته‌بندی نقاط تعادل به ما کمک میکند تا انواع نقاط تعادل و رابطه آنها با مدلهای رفتاری دراز مدت را بررس کنیم. برای این منظور دو نوع ماژول را میتوان دنبال کرد: ماژول کشفی که در آن چگونگی دسته‌بندی نقاط تعادل و اثر انواع مختلف آنها بر رفتار بلند مدت مدلها، کشف میشود. ماژول مرجع که چگونگی دسته‌بندی نقاط تعادل و اثر انواع مختلف آنها بر رفتار دراز مدت مدلها را توصیف میکند.

$$\begin{aligned} p &= mp + b \\ p - mp &= b \\ p(1-m) &= b \\ p &= \frac{b}{1-m} \end{aligned}$$

در ماژول کشفی لازم است که قبلا آشنایی کافی با مدلهای نمایی با مهاجرت، مدل سگ شکاری و مدلهای منطقی داشته باشیم. آیا در یک سیستم دینامیکی $p(n+1) = f(p(n))$، نقطه تعادل جاذب و متمرکز شونده است. ساده‌ترین سیستم دینامیکی خطی را مورد بررسی قرا میدهیم که در آن تابع $f(p)$ خطی است و به شکل عمومی $\mathbf{p(n+1) = m\,p(n) + b}$ هستند. به این دلیل که پیدا کردن نقطه تعادل آنها آسان است و فقط یک استثنا وجود دارد و آن وقتی است که $m=1$ زیرا یا نقطه تعادل وجود ندارد (اگر $b\neq0$) و یا هر نقطه از آن، نقطه تعادل محسوب میگردد (اگر $b=0$). میتوان ضرایب مختلفی برای m انتخاب کرد و متوجه شد که چه زمانی نقطه تعادل $b/(1-m)$ در سیستم دینامیک ساده خطی فوق، جاذب است و در چه شرایطی حد بی‌نهایت $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{b}{1-m}$ صادق است و آیا شرایط اولیه تاثیر و اختلافی بوجود می‌آورند.

$$\begin{aligned} p &= a(1-bp)p \\ p &= ap - abp^2 \\ (a-1)p - abp^2 &= 0 \\ p\left[(a-1) - abp\right] &= 0 \\ p &= 0 \text{ or} \\ p &= \frac{a-1}{ab} \end{aligned}$$

در سیستمهای غیر خطی $\mathbf{p(n+1) = f(p(n))}$ کار مشکل‌تر است. یک دلیل اینکه اغلب آنها بیش از یک نقطه تعادل دارند برای مثال مدل منطقی $\mathbf{p(n+1) = a\,[1 - b\,p(n)]\,p(n)}$ دارای دو نقطه تعادل است و مدلهای سگ شکاری دارای سه نقطه تعادل است. با استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی به راحتی میتوان مدلهای منطقی مختلف و نیز مدلهای سگ شکاری را بررسی کرد و شرایطی را که در آن نقطه تعادل جاذب است بررسی نمود و متوجه شد که در چه شرایط حد بینهایت $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{b}{1-m}$ صادق است.

ماژول مرجع نیز به نوبه خود دارای دو تئوری مهم است: تئوری دسته‌بندی خطی و غیرخطی که از دو نظر مهم هستند: اول اینکه سوالات مهمی در مورد نقاط تعادل در سیستمهای دینامیک منقطع را جواب میدهند و دوم اینکه اصولی را در مورد توابع خطی و غیر خطی بیان میکنند.

$$\begin{aligned} p_{n+1} - \frac{b}{1-m} &= mp_n + b - \frac{b}{1-m} \\ &= \frac{(mp_n+b)(1-m) - b}{1-m} \\ &= \frac{mp_n + b - m^2p_n - mb - b}{1-m} \\ &= \frac{mp_n - m^2p_n - mb}{1-m} \\ &= m\left(\frac{p_n - mp_n - b}{1-m}\right) \\ &= m\left(p_n - \frac{b}{1-m}\right) \end{aligned}$$

تئوری دسته‌بندی خطی: اگر m برای ۱ نباشد در این صورت سیستم دینامیکی خطی $\mathbf{p(n+1) = m\,p(n) + b}$ تنها دارای یک نقطه تعادل $b/(1-m)$ است و اگر $|m| < 1$ نقطه تعادل جاذب است و برای همه شرایط اولیه $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{b}{1-m}$ است . مهمترین گواه برای اثبات آن، مقایسه فاصله $|p_{n+1} - (b/1-m)|$ با فاصله $|p_n - (b/1-m)|$ است.

و این نشان میدهد که $\left|p_{n+1} - \frac{b}{1-m}\right| = |m|\left|p_n - \frac{b}{1-m}\right|$ و $\left|p_n - \frac{b}{1-m}\right| = |m|^{n-1}\left|p_1 - \frac{b}{1-m}\right|$. حال اگر $|m|<1$ باشد $\lim_{n\to\infty} |m|^{n-1} = 0$ به طوری که $\lim_{n\to\infty}\left|p_n - \frac{b}{1-m}\right| = 0 \text{ and } \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{b}{1-m}.$ و این مسئله را اثبات میکند.

تئوری دسته‌بندی غیرخطی: فرض کنیم که q یک نقطه تعادل در سیتم دینامیکی $\mathbf{p(n+1) = f(p(n))}$ است. در این صورت اگر $|f'(q)| < 1$ نقطه تعادل q جاذب است و این زمانی است که $p(1)$ نزدیک q است و در این صورت $\lim_{n\to\infty} p_n = q$ به نقاط تشابه و نقاط اختلاف بین دو تئوری خطی و غیر خطی توجه کنید. در مدل خطی، تنها یک نقطه

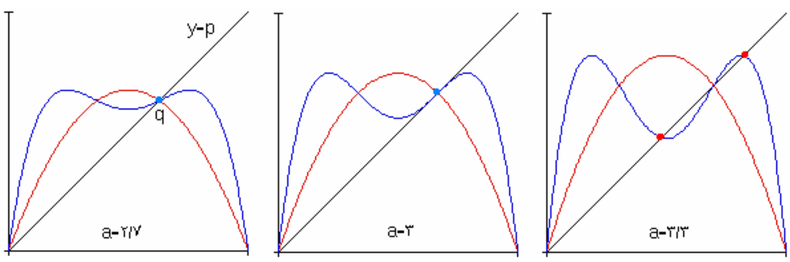
تعادل وجود دارد در حالی که در مدل غیرخطی ممکن است چند نقطه تعادل وجود داشته باشد. در مدل خطی، شیب m تعیین میکند که آیا نقطه تعادل جاذب است یا نه؟ در حالی که در حالت غیرخطی، مشتق معادله در نقطه q نقش شیب را بازی میکند. تئوری خطی، عام (global) است به این معنی که اگر نقطه تعادل جاذب باشد سکانسها متمرکز میشوند بدون اینکه شرایط اولیه بر روی آن اثری داشته باشد. تئوری غیر خطی، محلی (local) است به این معنی که اگر q نقطه تعادل باشد تنها در صورتی سکانسها را متمرکز میکند که شرایط اولیه به اندازه کافی نزدیک به q باشد. مدل سگ‌شکاری دو نقطه تعادل جاذب دارد که یکی از آنها صفر و دیگری غیر صفر است و این دو نقطه تعادل، با نقطه تعادل دیگری همراه میشوند که حد آستانه‌ای بیولوژیکی میباشد و اگر جمعیت اولیه بالای این حد آستانه‌ای باشد، در این صورت (به غیر از مواردی که اندازه جمعیت بسیار زیاد است) معمولا نقطه تعادل نهایی همان نقطه غیر صفر خواهد شد ولی اگر جمعیت اولیه کمتر از این حد آستانه‌ای باشد، گونه از بین میرود و نقطه تعادل به سمت صفر میرود.

دسته‌بندی چرخه‌های دوگانه

از نظر ریاضی به راحتی میتوان چرخه‌های دوگانه را طبقه‌بندی کرد زیرا یک سیستم دینامیک دو چرخه‌ای از نوع $\mathbf{p(n + 1) = f(p(n))}$، یک نقطه تعادل از سیستم دینامیک $q(n + 1) = f(f(q(n))$ است. البته عملیات جبری محاسبه آن دشوار است و باید از نرم‌افزار جبری استفاده کرد. میخواهیم بدانیم کدام مدل منطقی دارای چرخه دوگانه جاذب است. اولین مرحله، تعیین نقاط تعادل و دو چرخه برای مدل منطقی از نوع $\mathbf{p(n + 1) = a\ [1 - b\ \ p(n)]\ \ p(n)}$ است (نرم افزار CAS windows). مرحله دوم انتخاب یک نقطه حقیقی دارای چرخه دوگانه است یعنی نقطه‌ای که در چرخه دوگانه هست ولی نقطه تعادل نیست (نرم‌افزار). مرحله بعد محاسبه مشتق تابع $f(f(p))$ است و بقیه مراحل.

دوبله کردن دوره زمانی و راه رسیدن به کیاس (period-doubline)

مدل منطقی $p(n + 1) = f(p(n))$ و $f(p) = a\ (1 - bp)\ p$ رفتارهای جالبی دارند. قبلا مدل‌های منطقی دیدیم که به یک حد میرسند، مدلهایی که به چرخه‌های دوگانه و چرخه‌های بیشتر میرسند و همچنین مدلهایی دیدیم که به کیاس میرسند. در اینجا، ماژولی را ارائه داده‌ایم که اصطلاحا راهی به سوی کیاس نام دارد و رفتار زیبایی از خود نشان میدهند به این معنی که به سمت یک حد و همزمان به یک چرخه دوگانه میرسد. چهار فیلم تهیه شده است که همگی از خانواده مدلهای منطقی زیر هستند:



$$\mathbf{p(n + 1) = f(p(n))}$$
$$\mathbf{f(p) = a\ (1 - 0.01\ p)\ p}$$

در دو فیلم اول مقدار a بین ۰ تا ۴ است. اولین فیلم ۲۰ نسل اول را نشان میدهد، در حالی که $p(1)=5$ باشد. دومین فیلم خط قطری $y=p$ را به رنگ سیاه، منحنی $y=f(p)$ رابه رنگ قرمز و منحنی $y = f(f(p))$ را به رنگ آبی نشان میدهد. به یاد داشته باشیم که نقطه تعادل نقطه‌ای است که در آن منحنی $y= f(p)$ با خط $y=p$ برخورد میکند و اینکه نقطه تعادل به شرطی جاذب است که $|f'(p)|$ در نقطه تعادل کمتر از یک باشد. همچنین به یاد داشته باشیم که چرخه دو تایی یک جفت نقطه هستند که در آن منحنی $y = f(f(p))$ با خط $y=p$ برخورد میکند که نقطه تعادل نیستند به این معنی که منحنی $y=f(p)$ با خط $y=p$ برخورد نمیکند. در فیلم اول میتوانیم یک چرخه دوگانه جالب را ببینیم

زیرا پس از چند نسل، جمعیت بین دو رقم خاص، زیاد و کم میشود. همچنین میتوان در دومین فیلم نمونه چرخه دوگانه را دید با این توجه که منحنی $y = f(f(p))$ خط قطری $y=p$ را در نقاطی که نقطه تعادل نیستند، دو بار قطع میکند. از فیلم دوم میتوان فهمید که چرا برخی از این مدلها به جای اینکه به حد برسند به یک چرخه دوگانه میرسند. نقطه تعادل جاذب نیست زیرا شیب منحنی $y = f(p)$ که به رنگ قرمز است در این نقطه به لحاظ قدر مطلق بیشتر از ۱ است. با توجه به منحنی $y = f(f(p))$ (آبی) در دو نقطه چرخه دوگانه می‌بینیم که شیب آن کمتر از قدر مطلق ۱ است. به همین دلیل است که چرخه دوگانه جاذب و همگرا است. ما به پدیده‌ای به نام دوبل شدن دوره‌ای علاقه داریم که در آن یک نقطه تعادل جاذب به هم میخورد و همزمان یک چرخه دوگانه ظاهر میشود. به طو رکلی هر چرخه جاذب چند چرخه‌ای درست همان زمانیکه یک چرخه دوگانه جاذب و همگرا ظاهر میشود به هم میخورد.

اگر دو فیلی اول را ببینید، متوجه این پدیده خواهید شد. زمانیکه ثابت a در یک مدل منطقی از ۱ به ۴ رشد کند، خواهید دید که یک نقطه تعادل جاذب جای خود را به یک چرخه دوگانه میدهد. پدیده‌های دیگری نیز میتوان دید. میتوانید فیلم را کادر به کادر ببینید یا حرکت به جلو و عقب را تکرار کنید تا فهم درستی از پدیده دوبل شدن دوره زمانی بدست آورید. دو فیلم دیگر مثالی از دوبل شدن زمان را نشان میدهد که در آن چرخه دو گانه جاذب به هم میخورد و همزمان با آن یک چرخه چهار گانه ایجاد میشود. هر دو فیلم موارد زیر را نشان میدهند. خط قطری $y=p$ به رنگ سیاه، منحنی $y = f(f(p))$ به رنگ قرمز و منحنی $y = f(f(f(f(p))))$ به رنگ آبی. هر دو فیلم مشابه هم هستند با این تفاوت که فیلم دوم، یک کلوزآپ از یکی از دو نقطه چرخه دوگانه است. به فیلمها دقیق نگاه کنید که در زمانیکه چرخه دوگانه جاذب محو میشود و یک چرخه چهارگانه جای آنرا میگیرد، چه چیزی اتفاق می‌افتد. برای فهم دوبل کردن دوره زمانی از نظر گرافیکی، به سه تصویر زیر نگاه کنید که مربوط به a برابر ۲/۷، ۳ و ۳/۳ هستند. هر سه شکل دارای یک قطعه S شکل برای منحنی $y = f(f(p))$ هستند که در حول و حوش نقطه تعادل q متمرکز است. در اولین شکل ($a=2.7$) این قطعه S شکل خط قطری را فقط در یک نقطه قطع میکند که نقطه تعادل غیر صفر q است. در شکل وسطی ($a=3$)، همچنان خط قطری را در نقطه q قطع میکند ولی مماس بر این خط در همین نقطه نیز هست. این همان لحظه‌ای است که نقطه تعادل میرود که به هم بخورد و چرخه دو گانه ظاهر شود. در شکل سمت راست ($a=3/3$) قطعه S شکل خط قطری را در سه نقطه قطع کرده است. نقطه تعادل و دو نقطه جدید. این دو نقطه جدید دو نقطه از چرخه دو گانه هستند. برای درک بهتر مسئله بالا بهتر است به تابع $g(p) = f(f(p))$ و مشتق اولیه و ثانویه آن توجه شود. در نقطه تعادل q برای $f(q)=q$ داریم:

$$\begin{aligned} g(p) &= f(f(p)) \\ g'(p) &= f'(f(p))f'(p) \\ g''(p) &= f''(f(p))f'(p)^2 + f'(f(p))f''(p) \end{aligned}$$

$$g'(q) = f'(f(q))f'(q) = f'(q)f'(q) = f'(q)^2$$

مجددا به شکل $a=3$ توجه کنید و یا $f'(q)$ را وقتی $a=3$ است محاسبه نمایید. متوجه خواهید شد که در این شکل $f'(q) = -1$ است. بنابراین $g'(q) = 1$ است و ما از نظر جبری نیز همان چیزی را می‌بینیم که به روش ریاضی. منحنی $y = g(p)$ تانژانت خط قطری $y=p$ در این نقطه است. در ضمن توجه کنید که $g''(q) =$

$$\begin{aligned} g''(q) &= f''(f(q))f'(q)^2 + f'(f(q))f''(q) \\ &= f''(q)f'(q)^2 + f'(q)f''(q) \\ &= f''(q)[f'(q)^2 + f'(q)] \end{aligned}$$

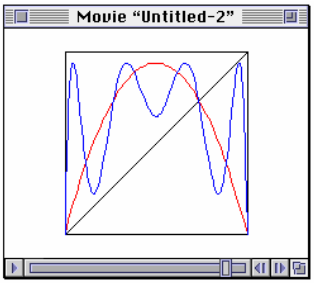
0است و این نشان میدهد که این نقطه در واقع نقطه عطف منحنی $y = q(p)$ است. محاسباتی که کردیم متکی بر قانون زنجیره و دیگر قوانین عمومی ریاضی و جبر دیفرانسیل است و تنها شکل خاصی از تابع اولیه $f(p)$ نیست. به همین دلیل دوبل دوبل کردن دوره‌ای، پدیده عمومی است و نه یک پدیده منفرد که فقط مدلهای منطقی را در بر داشته باشد. در واقع "راهی به سوی کیاس" یک پدیده عمومی است. این نوع رفتار به جای اینکه یک پدیده استثنایی باشد یک پدیده رایج و عمومی است.

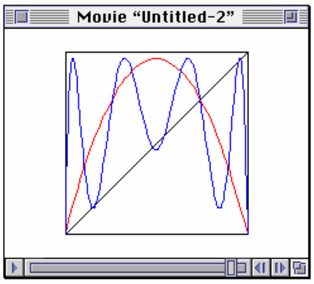
مدل زیر که در آن a یک عدد مثبت است،آیا شامل دوبله کردن زمانی میشود:

$$\mathbf{p(n + 1) = f(p(n))}$$

$f(p) = a\, p / 2^p$

این مدل یک نقطه تعادل غیر صفر $q = (\log a) / (\log 2)$ دارد که میتوان با محاسبه $f'(q)$ و حل معادله $|f'(q)| = 1$ آنرا بدست آورد. متوجه میشویم که نقطه‌ای که در آن نقطه تعادل از بین میرود نقطه $a = e^2$ است این خانواده از مدلها، دقیقا همان رفتار دوبله شدن دوره‌ای را از خود نشان میدهند که در مدل منطقی مشاهده کردیم.





چرخه سه‌گانه و مدل منطقی را مقایسه کنید؟

چرخه سه‌گانه را با بررسی تابع $g(p) = f(f(f(p)))$ مطالعه میکنیم و دنبال نقاطی میگردیم که منحنی $y = g(p)$ خط قطری $y = p$ را قطع کند و نقطه تعادل هم نباشد. دو تصویر زیر دو فریم از یک فیلم است که این گراف را در نتیجه افزایش A از ۰ به ۴ نشان میدهد. گراف تابع $y=f(p)$ به رنگ قرمز و گراف $y = g(p) = f(f(f(p)))$ به رنگ آبی نشان داده شده است. در فریم سمت چپ، گراف آبی فقط در یک نقطه خط قطری $y=p$ را قطع میکند و این نقطه تعادل است. در فریم سمت راست در سه جفت نقطه اضافی، آنرا قطع میکند. این سه جفت نقطه مرتبط با چرخه سه‌گانه است. وقتی این چرخه سه‌گانه برای اولین بار ظاهر میشوند، یکی از آنها جاذب و دیگری رفع میشود. به همین دلیل است که منحنی آبی تانژانت خط قطری دیده میشود و درست به محض اینکه ظاهر میشوند، هر جفت نقطه تقاطع، یک نقطه دیده میشود که شیب (مطلق) آن کمتر از یک است و دیگری شیب بیشتر از یک (مطلق) دارد.

منبع

- ***Euclidean and Non-Eculidean Geometries: Development and History, Third Edition***, Marvin Jay Greenberg, University of California, Santa Cruz
- ***Computation and Reasoning - A Type Theory for Computer Science***, Zhaohui Luo, University of Edinburgh
- ***Computational Complexity - A Conceptual Perspective***, Oded Goldreich
- ***Three Thresholds for a Liar***, Joel Spencer, Peter Winkler
- ***The Network Paradigm in Organizational Research: A Review and Typology***, Stephen P. Borgatti, Pacey C. Foster, Department of Organization Studies, Carroll School of Management, Boston College

تالیف: سعید بیکی (cephexin@secumania.net)

Secumania Security & Vulnerability Research Lab
www.secumania.net